

Seria repetytoriów dla szkół średnich

TABLICE MATURZYSTY MATEMATYKA



NASZ CEL:
MATURA
ZDANA NA 100%

TWÓJ DOMOWY NAUCZYCIEL

TABLICE MATURZYSTY

MATEMATYKA

Opracowanie tablic:

Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Kaja Mikoszevska

Redaktor serii: **Marek Jannasz**

Ilustracje: **Magdalena Wójcik**

Projekt okładki: **Teresa Chylińska-Kur, KurkaStudio**

Projekt makiety i opracowanie graficzne: **Kaja Mikoszevska**

Tablice opracowano z wykorzystaniem materiałów z książki „Matematyka. Repetytorium maturzysty” autorstwa Adama Konstantynowicza i Anny Konstantynowicz,
Wydawnictwo Lingo, Warszawa 2016 r.

© Copyright by Wydawnictwo Lingo sp. j., Warszawa 2016

www.cel-matura.pl

ISBN: 978-83-7892-371-8

ISBN wydania elektronicznego: 978-83-7892-473-9

Skład i łamanie: Kaja Mikoszevska

Drodzy Maturzyści!

Przed Wami egzamin dojrzałości z matematyki. Aby ułatwić Wam naukę, przygotowaliśmy dla Was pomoc w formie wygodnych i przejrzystych tablic. Zawierają one wszystkie istotne zagadnienia maturalne z matematyki w pigułce, dzięki czemu będziecie mogli w szybki i prosty sposób przypomnieć i utrwalić sobie najważniejsze informacje.

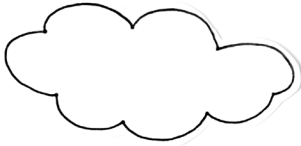
Zależało nam na tym, aby nauka z naszej książki była nie tylko pożyteczna, ale także przyjemna – zadbałismy zarówno o dobór tematów, jak i nowoczesny układ graficzny z ilustracjami.

Wierzymy, że „Tablice maturzysty” z serii OldSchool przydadzą się Wam na każdym etapie nauki, a także że będą dla Was skuteczną pomocą do powtórki przed egzaminem.

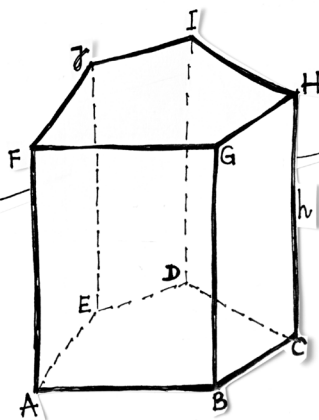
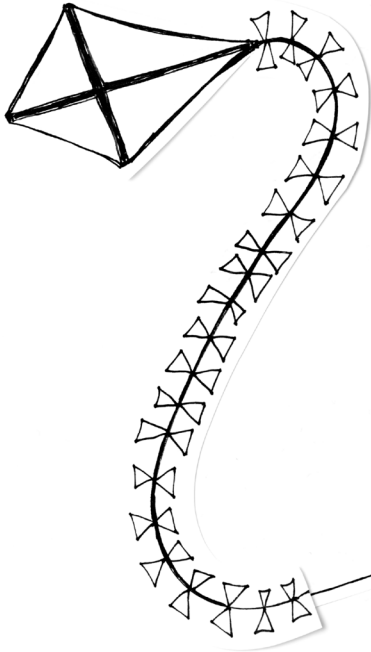
Z życzeniami powodzenia
autorzy i redaktorzy Lingo

Część 1. Podstawowe pojęcia	7
Część 2. Liczby rzeczywiste	33
Różne postaci liczb rzeczywistych	34
Wartość liczbową wyrażenia arytmetycznego	35
Pierwiastek dowolnego stopnia	37
Potęga o wykładniku wymiernym	38
Logarytmy	39
Błąd bezwzględny i błąd względny	40
Przedziały liczbowe	41
Wartość bezwzględna	43
Obliczenia procentowe	44
Część 3. Wyrażenia algebraiczne	51
Część 4. Równania i nierówności	57
Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	59
Układy równań	61
Nierówności	63
Równania kwadratowe i wielomianowe	64
Część 5. Funkcje	75
Sposoby opisywania funkcji	76
Wykresy funkcji	77
Funkcja liniowa	78
Funkcja kwadratowa	79
Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$	81
Funkcja wykładnicza	82
Część 6. Ciągi	95
Ciąg arytmetyczny	96
Ciąg geometryczny	97

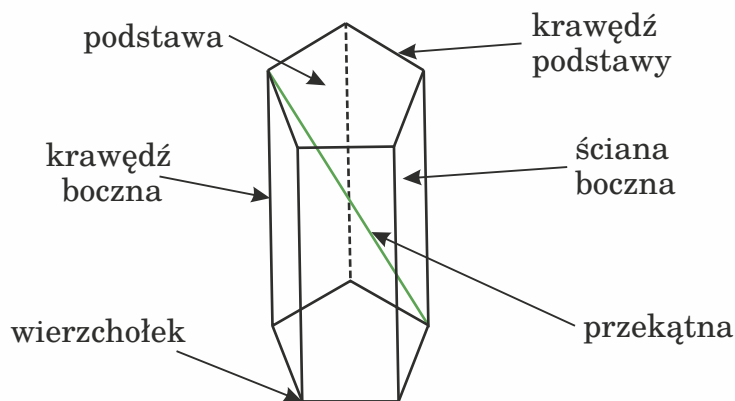
Część 7. Trygonometria	103
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	104
Część 8. Planimetria	111
Kąty w okręgu	112
Styczna do okręgu	113
Okręgi styczne	114
Trójkąty podobne	115
Pole trójkąta ostrokątnego	115
Część 9. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	123
Równanie prostej na płaszczyźnie	124
Wzajemne położenie prostych	125
Odcinki	125
Symetria w układzie współrzędnych	126
Część 10. Stereometria	133
Graniastopy	134
Ostrosłupy	137
Walec	139
Stożek	140
Kula	142
Część 11. Elementy statystyki opisowej	151
Średnia arytmetyczna, średnia ważona zestawu danych, mediana i odchylenie standardowe	152
Kombinatoryka	153
Prawdopodobieństwo zdarzeń	154



Stereo- metrja

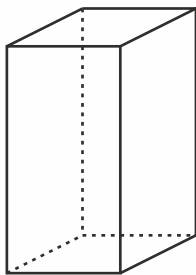
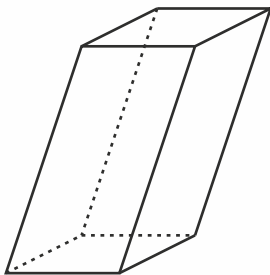


Graniastosłupy



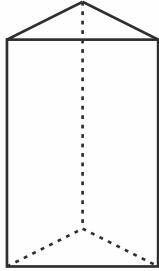
GRANIASTOSŁUPY	
ELEMENT	WŁASNOŚĆ
dwie podstawy	przystające wielokąty leżące w płaszczyznach równoległych
ściany boczne	równoległoboki
krawędzie boczne	każda krawędź boczna graniastosłupa prostego jest jego wysokością
przekątna graniastosłupa	odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastosłupa, a nie zawiera się w żadnej z jego ścian

PODZIAŁ GRANIASTOSŁUPÓW W ZALEŻNOŚCI OD KRAWĘDZI BOCZNYCH

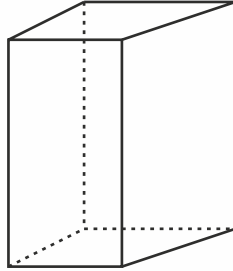
GRANIASTOSŁUP PROSTY	GRANIASTOSŁUP POCHYŁY
krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy	krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy
	

PODZIAŁ GRANIASTOSŁUPÓW W ZALEŻNOŚCI OD PODSTAWY

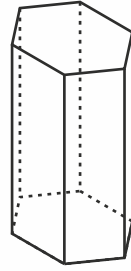
GRANIASTOSŁUP TRÓJKĄTNY



GRANIASTOSŁUP CZWOROKĄTNY



GRANIASTOSŁUP SZESCIOKĄTNY



- ◆ Graniastosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy graniastosłupem prawidłowym.

SZCZEGÓLNE GRANIASTOSŁUPY CZWOROKĄTNE

RODZAJ

WARUNEK

prostopadłościan

wszystkie ściany są prostokątami

sześcian

wszystkie ściany są kwadratami

- ◆ W graniastosłupie możemy wskazać kąty zawarte pomiędzy prostą i płaszczyzną oraz między dwiema prostymi.

KĄTY W GRANIASTOSŁUPACH

OZNACZENIE

OPIS

RYSUNEK

α

kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną

β

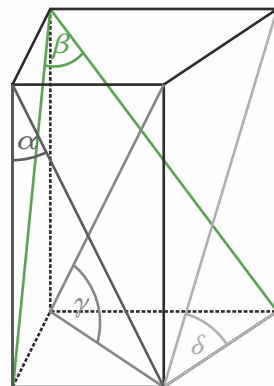
kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych

γ

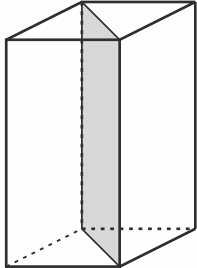
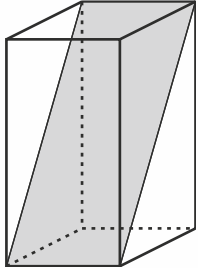
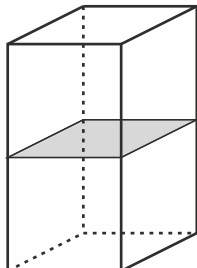
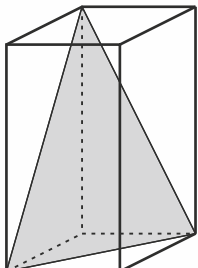
kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

δ

kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy

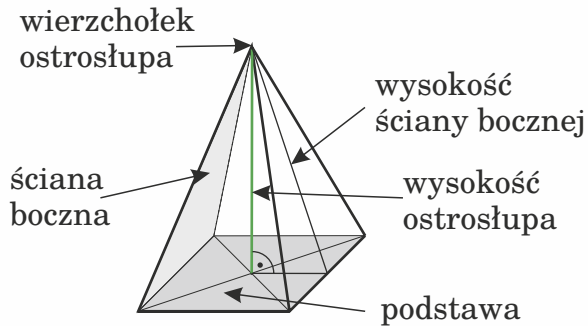


- ◆ Przekrój graniastosłupa jest częścią wspólną graniastosłupa i płaszczyzny.

PRZEKROJE GRANIASTOSŁUPÓW PŁASZCZYZNĄ			
RODZAJ	RYSUNEK	RODZAJ	RYSUNEK
przekrój płaszczyzną zawierającą przekątną prostopadłościanu		przekrój płaszczyzną przechodzącą przez dwie krawędzie nie należące do jednej ściany	
przekrój płaszczyzną przecinającą wszystkie krawędzie boczne prostopadłościanu		przekrój płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jednej podstawy i wierzchołek drugiej podstawy	

POLE I OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA		
MIARA	OPIS SŁOWNY	WZÓR
pole powierzchni całkowitej	suma pól powierzchni wszystkich ścian bocznych i dwóch podstaw	$P_c = 2P_p + P_b$ P_p – pole podstawy P_b – pole ścian bocznych
objętość	iloczyn pola podstawy i długości wysokości	$V = P_p \cdot H$ P_p – pole podstawy H – długość wysokości

Ostrosłupy



OSTROŚLUPY

ELEMENT	WŁASNOŚĆ
podstawa	dowolny wielokąt
ściany boczne	trójkąty o wspólnym wierzchołku; ich liczba zależy od rodzaju wielokąta w podstawie
wysokość ostrosłupa	odcinek łączący wierzchołek z płaszczyzną podstawy i prostopadły do niej

PODZIAŁ OSTROŚLUPÓW W ZALEŻNOŚCI OD PODSTAWY

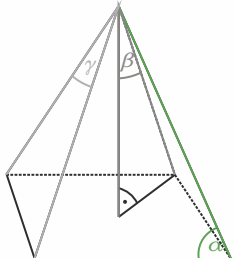
OSTROŚLUP TRÓJKĄTNY	OSTROŚLUP CZWOROKĄTNY	OSTROŚLUP SZESCIOKĄTNY
		

- ◆ Ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

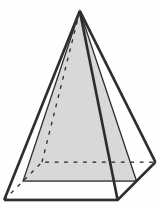
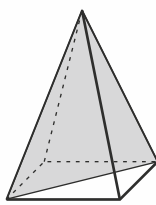
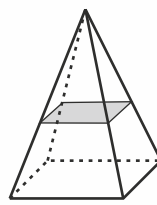
SZCZEGÓLNE OSTROŚLUPY TRÓJKĄTNE

RODZAJ	WARUNEK
czworościan	ostrosłup trójkątny
czworościan foremny	wszystkie krawędzie mają jednakowe długości

- ◆ W ostrosłupie możemy wskazać kąty zawarte między prostą i płaszczyzną oraz między dwiema prostymi.

KĄTY W OSTROSŁUPACH		
OZNACZENIE	OPIS	RYSUNEK
α	kąt między krawędzią podstawy i krawędzią boczną	
β	kąt między krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa	
γ	kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi ostrosłupa	

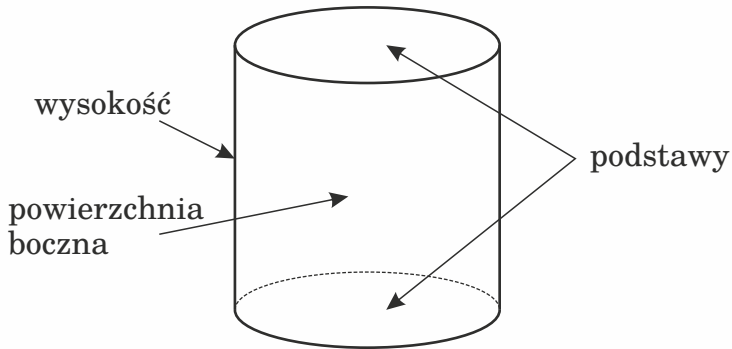
- ◆ Przekrój ostrosłupa jest częścią wspólną ostrosłupa i płaszczyzny.

PRZEKROJE OSTROSŁUPÓW PŁASZCZYZNĄ		
przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa	przekrój płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość ostrosłupa	przekrój płaszczyzną przecinającą wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa
		

POLE I OBJĘTOŚĆ OSTROSŁUPA		
MIARA	OPIS SŁOWNY	WZÓR
pole powierzchni całkowitej	suma pól wszystkich ścian bocznych i podstawy	$P_c = P_p + P_b$ P_p – pole podstawy P_b – pole powierzchni bocznej
objętość	trzecia część iloczynu pola podstawy i długości wysokości ostrosłupa	$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$ P_p – pole podstawy H – długość wysokości

Walec

- ◆ Walec jest bryłą powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z boków prostokąta (oś walca).



WALEC	
ELEMENT	WŁASNOŚĆ
podstawy	dwa przystające i równoległe koła
wysokość	każdy odcinek łączący podstawy walca i prostopadły do podstaw

- ◆ Przekrój walca jest częścią wspólną walca i płaszczyzny.

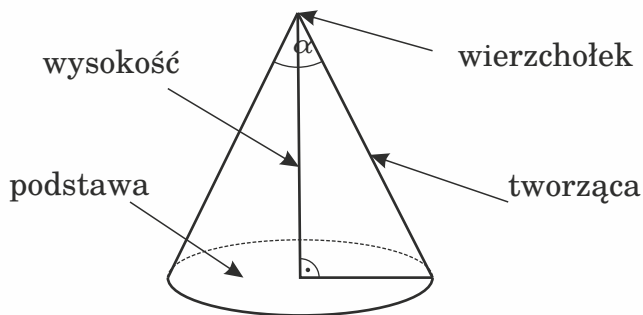
PRZEKROJE WALCÓW PŁASZCZYZNĄ	
PRZEKRÓJ OSIOWY WALCA	PRZEKRÓJ POPRZECZNY WALCA
przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu	przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy

POLE I OBJĘTOŚĆ WALCA

MIARA	OPIS SŁOWNY	WZÓR
pole powierzchni	suma pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej	$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$ r - długość promienia podstawy H - długość wysokości
objętość	iloczyn pola podstawy i wysokości walca	$V = \pi r^2 \cdot H$ r - długość promienia podstawy H - długość wysokości

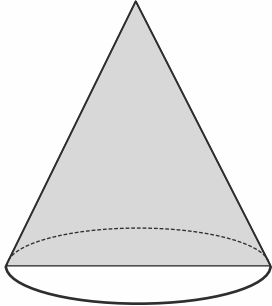
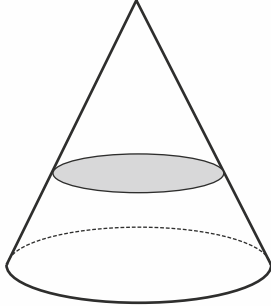
Stożek

- Stożek jest bryłą powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).

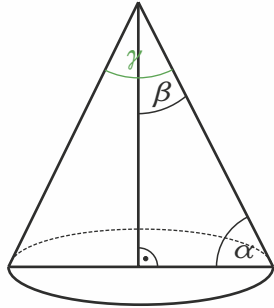
**STOŻEK**

ELEMENT	WŁASNOŚĆ
podstawa	koło
tworząca stożka	każdy odcinek łączący wierzchołek z punktem na brzegu podstawy
wysokość	odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy

- ◆ Przekrój stożka jest częścią wspólną stożka i płaszczyzny.

PRZEKROJE STOŻKA PŁASZCZYZNĄ	
PRZEKRÓJ OSIOWY STOŻKA	PRZEKRÓJ POPRZECZNY STOŻKA
przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu	przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy
	

- ◆ W stożku możemy wskazać kąty zawarte między odcinkami oraz kąt między odcinkiem i płaszczyzną.

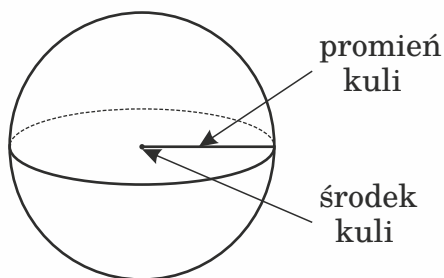
KĄTY W STOŻKACH		
OZNACZENIE	OPIS	RYSUNEK
α	kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy	
β	kąt między wysokością i tworzącą	
γ	kąt rozwarcia	

POLE I OBJĘTOŚĆ STOŻKA

MIARA	OPIS SŁOWNY	WZÓR
pole powierzchni	pole podstawy plus pole powierzchni bocznej	$P_c = \pi r^2 + \pi r l$ r – długość promienia podstawy l – długość tworzącej
objętość	trzecia część iloczynu pola podstawy plus długość wysokości stożka	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$ r – długość promienia podstawy H – długość wysokości

Kula

- ♦ Kula jest bryłą powstałą przez obrót koła wokół średnicy.

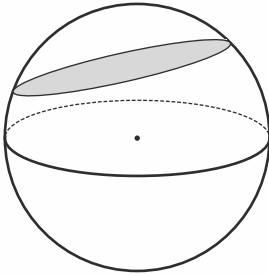
**KULA**

ELEMENT	WŁASNOŚĆ
promień	każdy odcinek łączący środek kuli z jej powierzchnią
sfera	powierzchnia kuli

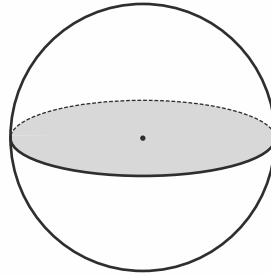
- ◆ Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli.

PRZEKROJE KULI PŁASZCZYZNĄ

przekrój kuli płaszczyzną



przekrój kuli, do którego należy środek kuli, to koło wielkie

**POLE I OBJĘTOŚĆ KULI****MIARA****OPIS SŁOWNY****WZÓR**

pole powierzchni

czterokrotność pola powierzchni jej koła wielkiego

$$P = 4\pi r^2$$

 r – długość promienia kuli

objętość

cztery trzecie iloczynu liczby π i sześcianu długości promienia kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

 r – długość promienia kuli

ZAPAMIĘTAJ

Gnaniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (podstawy) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany (ściany boczne) są równoległobokami.

Jeśli krawędzie boczne gnaniastosłupa są prostopadłe do podstawy, to gnaniastosłup nazywamy prostym, w przeciwnym wypadku gnaniastosłup nazywamy pochyłym.

Gnaniastosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy gnaniastosłupem prawidłowym.

Nazwa gnaniastosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w jego podstawie.

Pole powierzchni całkowitej gnaniastosłupa wyraża się wzorem $P_c = 2P_p + P_b$, gdzie P_p oznacza pole podstawy gnaniastosłupa, a P_b – pole ścian bocznych.

Objętość gnaniastosłupa opisuje wzór $V = P_p \cdot H$, gdzie P_p oznacza pole podstawy gnaniastosłupa, a H – długość wysokości.

Ostrosłup jest wielościanem, którego jedna ściana, zwana podstawą ostrosłupa, jest dowolnym wielokątem. Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Liczba ścian bocznych ostrosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w podstawie.

Nazwa ostrosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w jego podstawie.

Ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

Ostrosłup trójkątny nazywa się też czworościanem. Czwościan, którego wszystkie krawędzie mają jednakowe długości, to czworościan foremny.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wyraża się wzorem $P_c = P_p + P_b$, gdzie P_p oznacza pole podstawy ostrosłupa, a P_b – pole ścian bocznych.

Objętość ostrosłupa opisuje wzór $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$, gdzie P_p oznacza pole podstawy ostrosłupa, a H – długość wysokości.

Walec jest bryłą powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z boków prostokąta (oś walca).

Podstawami walca są dwa przystające i równoległe koła. Każdy odcinek łączący podstawy walca i prostopadły do podstaw nazywamy wysokością walca.

Pole powierzchni całkowitej walca wyraża się wzorem $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$, gdzie r oznacza długość promienia podstawy, a H – długość wysokości.

ZAPAMIĘTAJ

Objętość walca opisuje wzór $V = \pi r^2 \cdot H$, gdzie r oznacza długość promienia podstawy, a H – długość wysokości.

Stożek jest bryłą powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).

Podstawą stożka jest koło. Każdy odcinek łączący wierzchołek z punktem na brzegu podstawy nazywa się tworzącą stożka, zaś odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy wysokością stożka.

Pole powierzchni całkowitej stożka wyraża się wzorem $P_c = \pi r^2 + \pi r l$, gdzie r oznacza długość promienia podstawy, a l – długość tworzącej.

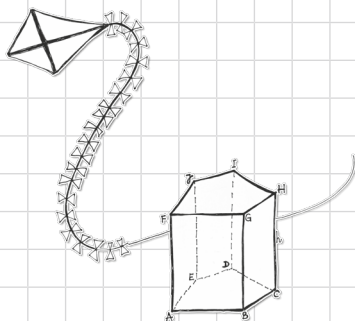
Objętość stożka opisuje wzór $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$, gdzie r oznacza długość promienia podstawy, a H – długość wysokości.

Kula jest bryłą powstałą przez obrót koła wokół średnicy.

Każdy odcinek łączący środek kuli z jej powierzchnią nazywamy promieniem kuli.

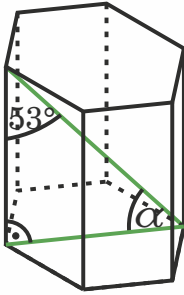
Pole powierzchni całkowitej kuli wyraża się wzorem $P = 4\pi r^2$, gdzie r oznacza długość promienia kuli.

Objętość kuli opisuje wzór $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, gdzie r oznacza długość promienia kuli.



Rozwiązywanie zadań krok po kroku

GRANIASTOSŁUPY

KROK	OPIS
treść zadania	Kąt między przekątną graniastosłupa prostego sześciokątnego a jego krawędzią boczną ma miarę 53° . Oblicz miarę kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy.
obliczenia	<p>Wykonujemy rysunek pomocniczy.</p>  <p>Przekątna graniastosłupa prostego tworzy z krawędzią boczną i przekątną podstawy trójkąt prostokątny. Zatem $\alpha + 53^\circ = 90^\circ$, czyli $\alpha = 37^\circ$.</p>
odpowiedź	Miara kąta nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy wynosi 37° .

OSTROŚLUP

KROK

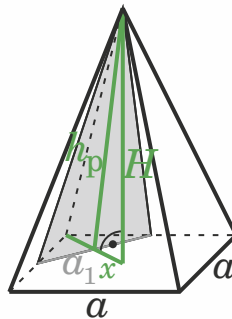
OPIS

treść zadania

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy długości 4 i wysokość długości $5\sqrt{2}$. Oblicz pole przekroju zawierającego wysokości sąsiednich ścian bocznych.

obliczenia

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Obliczamy pole przekroju.

$$P_{prz} = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_p$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

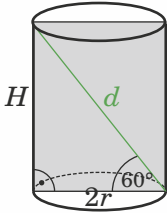
$$x = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$h_p = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$P_{prz} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13} = 2\sqrt{26}$$

odpowieź

Pole przekroju wynosi $2\sqrt{26}$.

WALEC	
KROK	OPIS
treść zadania	Przekrój osiowy walca jest prostokątem, w którym przekątna o długości $8\sqrt{3}$ tworzy z podstawą walca kąt o mierze 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły.
obliczenia	<p>Wykonujemy rysunek pomocniczy:</p>  <p>Obliczamy długość wysokości.</p> $\frac{H}{d} = \sin 60^\circ$ $\frac{H}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $H = 12$ <p>Obliczamy długość promienia podstawy.</p> $\frac{2r}{d} = \cos 60^\circ$ $\frac{2r}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad r = 2\sqrt{3}$ <p>Obliczamy pole powierzchni całkowitej i objętość.</p> $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$ $P_c = 2\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 + 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 12 = 24\pi(1 + 2\sqrt{3})$ $V = \pi r^2 \cdot H$ $V = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 12 = 144\pi$
odpowiedź	Pole powierzchni wynosi $24\pi(1 + 2\sqrt{3})$, a objętość 144π .

STOŻEK

KROK

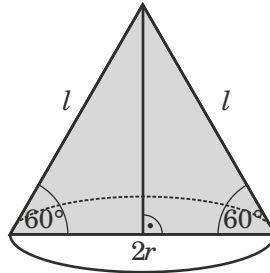
OPIS

treść zadania

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tej bryły.

obliczenia

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Obliczamy długość tworzącej i długość promienia podstawy:

$$P_{prz} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$27\sqrt{3} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$l = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$l = 2r$$

$$r = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość wysokości stożka:

$$l^2 = r^2 + H^2$$

$$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{3})^2 + H^2$$

$$H = 9 \text{ (cm)}$$

Obliczamy objętość i pole powierzchni bocznej:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 9 = 81\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$P_b = \pi r l$$

$$P_b = \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

odpowiedź

Objętość stożka wynosi $81\pi \text{ cm}^3$, a pole powierzchni bocznej $54\pi \text{ cm}^2$.

KULA	
KROK	OPIS
treść zadania	Wyznacz, jaką całkowitą liczbą centymetrów powinna być w przybliżeniu wyrażona długość promienia naczynia mającego kształt półkuli, aby naczynie mogło pomieścić dwa litry wody.
obliczenia	$2 \text{ litry} = 2 \text{ dm}^3 = 2000 \text{ cm}^3$ $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ $\frac{2}{3} \pi r^3 = 2000 \qquad r = \frac{10\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ $r \approx 9,85 \text{ (cm)}$
odpowiedź	Długość promienia półkuli powinna wynosić 10 cm.